ECUACIONES EXPONENCIALES

Una **ecuación exponencial** es aquella en la que aparecen exponenciales, es decir, potencias cuyos exponentes son expresiones en las que aparece una incógnita (Una letra).

Una forma de resolver una ecuación exponencial es usar la propiedad que nos dice que si dos potencias tienen la misma base, entonces sus exponentes deben ser iguales (En este plan no utilizaremos logaritmos):

$$\boldsymbol{Para\ b > 0\ \ y\ \ b \neq 1, si\ b^x = b^y, entonces\ x = y}$$

Si tenemos el siguiente problema:

1) $\mathbf{2^{3+x} = 2^{4x-9}}$

$3 + x = 4x - 9$ Por la regla anterior

$-4x + x = -3 - 9$ Resolvemos la ecuación lineal

$-3x = -12$

$\boxed{x = 4}$

Cuando las bases no son iguales, se debe verificar si están relacionadas al ser potencias del mismo número:

2) $\mathbf{4^{x+3} = 8^{x-1}}$

$\mathbf{2^{2(x+3)} = 2^{3(x-1)}}$ cambiamos el 4 y el 8 por potencias de 2

$\mathbf{2^{2x+6} = 2^{3x-3}}$

$2x + 6 = 3x - 3$ Podemos igualar los exponentes

$2x - 3x = -6 - 3$ Resolvemos la ecuación lineal

$-x = -9$

$\boxed{x = 9}$

3) $\mathbf{\frac{1}{9^{3x}} = 27}$

$\mathbf{3^{-2(3x)} = 3^3}$ Se escribe de tal modo que las bases sean iguales

$\mathbf{3^{-6x} = 3^3}$

$-6x = 3$ Podemos igualar los exponentes

$x = \frac{3}{-6}$ Resolvemos la ecuación lineal

$\boxed{x = -\frac{1}{2}}$

4) $\mathbf{4^{2x+1} = (0,5)^{3x+5}}$

$\mathbf{4^{2x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+5}}$ Se escribe de tal modo que las bases sean iguales

$\mathbf{2^{2(2x+1)} = 2^{-1(3x+5)}}$

$\mathbf{2^{4x+2} = 2^{-3x-5}}$ Podemos igualar los exponentes

$4x + 2 = -3x - 5$ Resolvemos la ecuación lineal

$4x + 3x = -2 - 5$

$7x = -7$

$x = -\frac{7}{7}$

$\boxed{x = -1}$

5) $\mathbf{64^{-2x} \cdot 16^{-x-2} = 4^{6-4x}}$

$\mathbf{4^{3(-2x)} \cdot 4^{2(-x-2)} = 4^{6-4x}}$ Se escribe de tal modo que las bases sean iguales

$\mathbf{4^{-6x} \cdot 4^{-2x-4} = 4^{6-4x}}$ Se utiliza la propiedad: $\boldsymbol{m^a \cdot m^b = m^{a+b}}$

$\mathbf{4^{-6x-2x-4} = 4^{6-4x}}$ Podemos igualar los exponentes

$\boldsymbol{-6x - 2x - 4 = 6 - 4x}$ Resolvemos la ecuación lineal

$\boldsymbol{-6x - 2x + 4x = 6 + 4}$

$\boldsymbol{-4x = 10}$

$\boldsymbol{x = \frac{10}{-4}}$

$\boxed{\boldsymbol{x = -\frac{5}{2}}}$

Existe un ***segundo tipo de ecuaciones exponenciales***, en este tipo de problemas tendremos sumas de términos:

Ejemplo:

$$2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^x = 28$$

$$2^x \cdot 2^1 + \frac{2^x}{2^1} + 2^x = 28$$

Primero utilizamos las leyes de las Potencias

$$2^x \cdot 2 + \frac{2^x}{2} + 2^x = 28$$

$$2 \cdot 2^x + \frac{2^x}{2} + 2^x = 28$$

Multiplicamos toda la ecuación por 2 para eliminar el denominador 2

$$\left[2 \cdot 2^x + \frac{2^x}{2} + 2^x = 28\right] \cdot 2$$

$$4 \cdot 2^x + 2^x + 2 \cdot 2^x = 56$$

Se utiliza factor común

$$2^x(4 + 1 + 2) = 56$$

$$2^x(7) = 56$$

$$2^x = \frac{56}{7}$$

$$2^x = 8$$

$$2^x = 2^3$$

$$\boxed{x = 3}$$

Además existe un ***tercer tipo de ecuaciones exponenciales***, en este tipo de problemas tendremos que convertir la ecuación en una ecuación de segundo grado reemplazando la base que tiene exponente con variable por alguna letra, veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo:

$$\mathbf{3^{2x} - 7 \cdot 3^{x} = 18}$$

$$\mathbf{3^{2x} - 7 \cdot 3^{x} = 18}$$

Reemplazamos 3^x por una letra, en este caso:

$m = 3^x$

$$\boldsymbol{m^2 - 7m = 18}$$

Resolvemos la ecuación cuadrática

$$\boldsymbol{m^2 - 7m - 18 = 0}$$

$$\boldsymbol{(m - 9)(m + 2) = 0}$$

$$\boldsymbol{\rightarrow m_1 = 9 \quad y \quad m_2 = -2}$$

Descartamos el valor negativo y el positivo lo

reemplazamos en $m = 3^x$

$$\boldsymbol{m = 3^x}$$

$$\mathbf{9 = 3^x}$$

$$\mathbf{3^2 = 3^x}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x = 2}}$$