# INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

## Concepto de Valor Absoluto

Cualquier número $x$ tiene su representación en la recta real. El valor absoluto de un número representa la distancia del punto $x$ al origen. Podemos interpretar que la distancia del 3 al origen es 3 unidades, igual que la distancia del punto $-3$ al origen es 3.

En notación, esto es $|3| = 3 = |-3|$ (las barras se leen como el valor absoluto de la cantidad que está dentro de ellas).

En el valor absoluto no importa en qué lado de la recta real está representado el número. Analíticamente, podemos ver que si $x$ es positivo, es decir, está a la derecha del cero, entonces $|x| = x$; y si está a la izquierda del origen, es decir, si $x$ es negativo, entonces $|x| = -x$.

## Definición

Si $x$ es un número real $(x \in R)$, el valor absoluto de $x$ se escribe $|x|$ y se define por:

$$|x| = \begin{cases} -x, & si\ x < 0 \\ x, & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

**EJEMPLO 1** **Resuelva la ecuación con valor absoluto**

Resuelva $|\mathbf{2x - 5}| = \mathbf{9}$

**Solución**

Escriba la ecuación con valor absoluto como dos ecuaciones lineales y resuelva cada ecuación lineal:

$|\mathbf{2x - 5}| = \mathbf{9}$

| | | |
|---|---|---|
| $2x - 5 = 9$ | o | $2x - 5 = -9$ |
| $2x = 9 + 5$ | o | $2x = -9 + 5$ |
| $2x = 14$ | o | $2x = -4$ |
| $x = \frac{14}{2}$ | o | $x = \frac{-4}{2}$ |
| $x = 7$ | o | $x = -2$ |

**EJEMPLO 2** **Resuelva la ecuación con valor absoluto**

Resuelva $|\mathbf{2x-1}| = \mathbf{5}$

**Solución**

Escriba la ecuación con valor absoluto como dos ecuaciones lineales y resuelva cada ecuación lineal:

$|\mathbf{2x-1}| = \mathbf{5}$

| | | |
|---|---|---|
| $2x-1=5$ | o | $2x-1=-5$ |
| $2x=1+5$ | o | $2x=1-5$ |
| $2x=6$ | o | $2x=-4$ |
| $x=\frac{6}{2}$ | o | $x=\frac{-4}{2}$ |
| $x=3$ | o | $x=-2$ |

Las soluciones son x=3 y x=2

## Inecuaciones con valor absoluto

Para resolver inecuaciones que involucran valor absoluto; expresiones algebraicas de la forma $ax+b$, donde $a$ y $b$ son constantes reales con $a \neq 0$, y $x$ es una variable real, se utiliza la definición de valor absoluto y se aplican algunas de las propiedades, con el fin de facilitar el procedimiento de resolución.

Así, siendo $c > 0$:

i) Si $|\boldsymbol{ax+b}| < \boldsymbol{c},$ entonces $\boldsymbol{-c < ax+b < c}$

ii) Si $|\boldsymbol{ax+b}| \leq \boldsymbol{c},$ entonces $\boldsymbol{-c \leq ax+b \leq c}$

iii) Si $|\boldsymbol{ax+b}| > \boldsymbol{c},$ entonces $\boldsymbol{ax+b > c}$ **ó** $\boldsymbol{ax+b < -c}$

iv) Si $|\boldsymbol{ax+b}| \geq \boldsymbol{c},$ entonces $\boldsymbol{ax+b \geq c}$ **ó** $\boldsymbol{ax+b \leq -c}$

**EJEMPLOS** Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones con valor absoluto.

**1)** $|x - 3| < 2$

Solución:

Utilizando (i) tenemos que:

$-2 < x - 3 < 2$

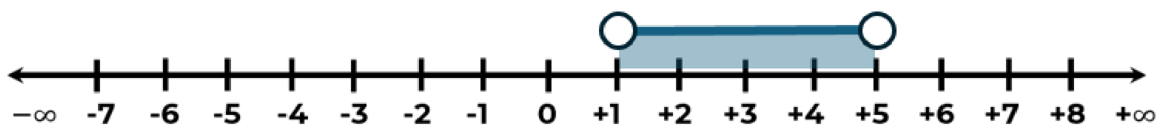
$-2 + 3 < x < 2 + 3$

$1 < x < 5$

Conjunto solución: $S = \{x \in R / 1 < x < 5\}$

Intervalo: $(1, 5)$

Gráfica:




**2)** $|2x - 3| \leq 7$

Solución:

Utilizando (ii) tenemos que:

$-7 \leq 2x - 3 \leq 7$

$-7 + 3 \leq 2x \leq 7 + 3$

$-4 \leq 2x \leq 10$

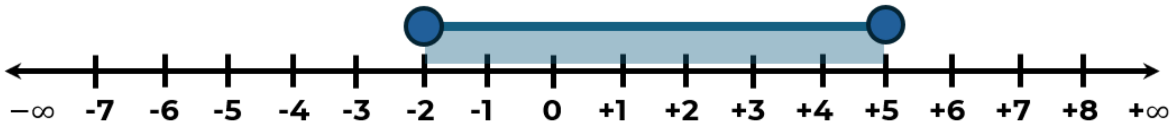
$\frac{-4}{2} \leq x \leq \frac{10}{2}$

$-2 \leq x \leq 5$

Conjunto solución: $S = \{x \in R/-2 \leq x \leq 5\}$

Intervalo: $[-2, 5]$

Gráfica:




**3)** $|\mathbf{4 - 3x}| > \mathbf{8}$

**Solución:**

Utilizando (iii) tenemos que:

$$4 - 3x > 8 \quad \text{o} \quad 4 - 3x < -8$$

$$-3x > 8 - 4 \qquad -3x < -8 - 4$$

$$-3x > 4 \qquad -3x < -12$$

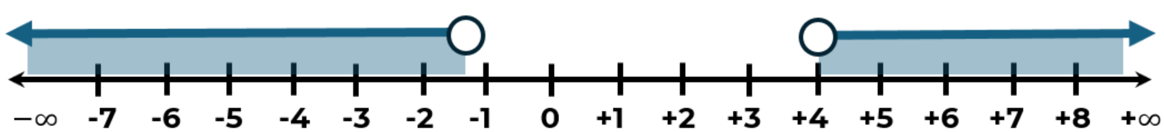
$$x < \frac{4}{-3} \qquad x > \frac{-12}{-3}$$

$$x < -\frac{4}{3} \qquad x > 4$$

Conjunto solución: $S = \left\{x \in R/x < -\frac{4}{3} \;\; \text{ó} \;\; x > 4\right\}$

Intervalo: $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right) \cup (4, +\infty)$

Gráfica:



**4)** $|\mathbf{2x-1}| \geq \mathbf{3}$

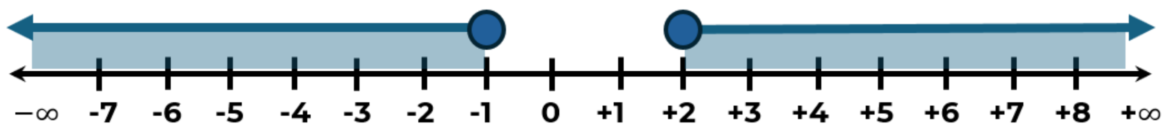
Utilizando (iv) tenemos que:

| | | |
|---|---|---|
| $2x-1 \geq 3$ | o | $2x-1 \leq -3$ |
| $2x \geq 3+1$ | | $2x \leq -3+1$ |
| $2x \geq 4$ | | $2x \leq -2$ |
| $x \geq \frac{4}{2}$ | | $x \leq \frac{-2}{2}$ |
| $x \geq 2$ | | $x \leq -1$ |

Conjunto solución: $S = \{x \in R / x \geq 2 \ \ \text{ó} \ \ x \leq -1\}$

Intervalo: $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$

Gráfica:




**5)** $|\mathbf{6x-8}| + \mathbf{5} < \mathbf{3}$

**Solución:**

$|\mathbf{6x-8}| < -5+3$

$|\mathbf{6x-8}| < -2$

Como $|\mathbf{6x-8}|$ siempre será mayor o igual a 0 para cualquier número real x, la desigualdad nunca podrá ser verdadera. Por lo tanto, la solución es el conjunto vacío, $\emptyset$.