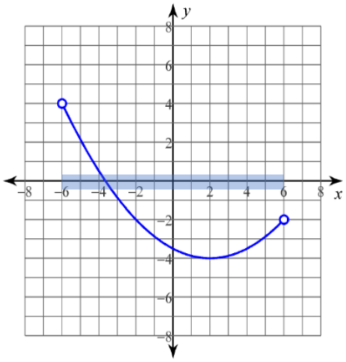
DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

El dominio de una función es el conjunto de todas las entradas para la función.

En términos del plano cartesiano, el dominio corresponde al conjunto formado por los valores posibles para X.



Si observamos esta gráfica, la x puede tomar valores mayores a -6 y menores que 6; por lo tanto, el dominio sería -6 < x < 6. El dominio también se puede escribir como notación de intervalo (-6, 6) y cómo notación de conjunto

$\{x \in \mathbb{R} / -6 < x < 6\}$

El dominio de una función puede indicarse explícitamente. Por ejemplo, si escribimos:

$$f(x) = 2x^2 - 5 \qquad -1 \leq x \leq 6$$

Entonces el dominio es el conjunto de todos los números reales x para los cuales

$-1 \leq x \leq 6$.

Ahora consideremos la siguiente función: $f(x) = \frac{1}{x-3}$

La función f no está definida en x=3, así que su dominio son todos los números reales excepto el 3.

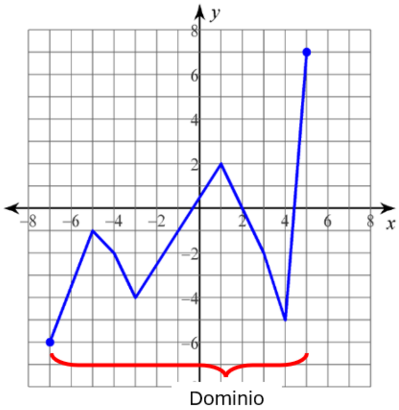
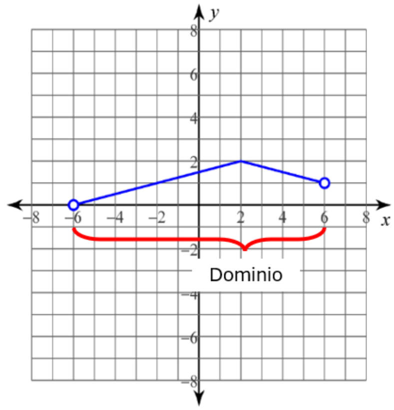
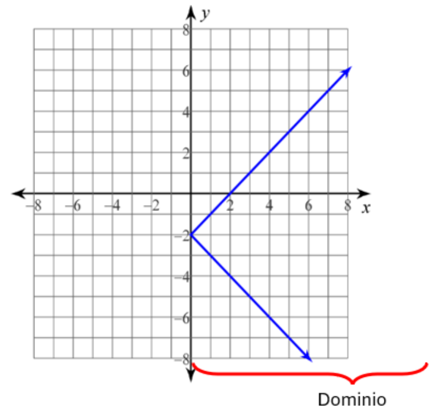
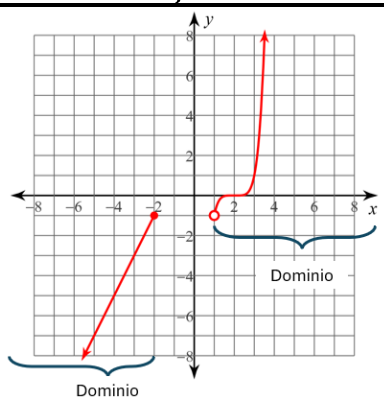
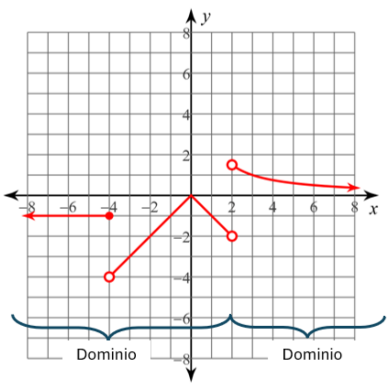
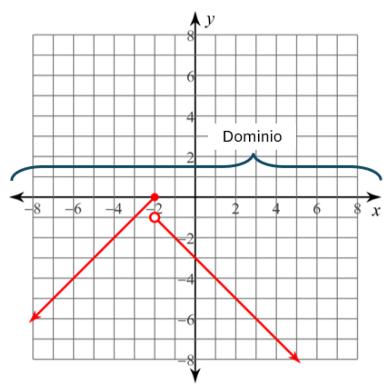
El dominio se puede escribir así:

$x \in (-\infty, 3) U (3, +\infty)$ Notación de intervalo

$x \in \{x \in \mathbb{R} / x \neq 3\}$ Notación de conjunto

DOMINIO DE UNA FUNCIÓN CONOCIENDO SU GRÁFICA

El Dominio es el conjunto de entradas o valores que puede tomar la x. En las siguientes imágenes veremos el dominio de tres funciones y otras tres funciones por partes.

		
La siguiente ilustración nos muestra que el dominio serían las x mayores o iguales que -7 y menores o iguales que 5. Se escribe $D_f = x \in [-7, 5]$	El dominio serían las x mayores que -6 y menores que 6. Se escribe $D_f = x \in (-6, 6)$	El dominio serían las x mayores o iguales que 0, las flechas nos indican que la gráfica continúa hasta +∞ Se escribe $D_f = x \in [0, +\infty)$
		
$D_f = x \in (-\infty, -2] U (1, +\infty)$	Cuando x=-4 hay una bolita rellena que le daría valor a "y"; sin embargo, cuando x=2 ambas bolitas están sin rellenar y la "y" no tiene valor. Por lo tanto, el dominio será: $D_f = x \in (-\infty, 2) U (2, +\infty)$	Cuando x=-2 hay una bolita rellena que le daría valor a "y"; Por lo tanto, el dominio será: $D_f = x \in (-\infty, +\infty)$

DOMINIO DE UNA FUNCIÓN SI NO SE CONOCE SU GRÁFICA

Importante: Si trabajamos funciones constantes, lineales, cuadráticas o cualquier tipo de función polinómica, el dominio serán todos los números reales a menos que se haya expresado el dominio de forma explícita.

$\boldsymbol{f(x) = 6}$ función constante

$\boldsymbol{f(x) = x - 3}$ función lineal

$\boldsymbol{f(x) = x^2 + 4x - 2}$ función cuadrática

$\boldsymbol{f(x) = 2x^4 - 5x + 1}$ función polinómica

El Dominio de todas estas funciones es $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$, escrito de otra manera $(-\infty, +\infty)$

DOMINIO DE FUNCIONES RACIONALES

Las funciones racionales son aquellas que están definidas como el cociente de polinomios en los cuales el denominador tiene una grado mayor o igual a 1.

¿Cómo encontrar el dominio de funciones racionales?

Veamos los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 1

Sea $\boldsymbol{f(x) = \frac{x-6}{x+3}}$ Encuentre su dominio.

SOLUCIÓN

El denominador debe ser distinto de cero, por lo tanto:

$\boldsymbol{x + 3 \neq 0}$

$\boldsymbol{x \neq -3}$

Entonces el dominio es $\boldsymbol{D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq -3\}}$ o bien $\boldsymbol{x \in (-\infty, -3) U (-3, \infty)}$

EJEMPLO 2

Sea $\boldsymbol{f(x) = \frac{x+1}{x^2+3x-10}}$ Encuentre su dominio.

SOLUCIÓN

El denominador debe ser distinto de cero, por lo tanto:

$\boldsymbol{x^2 + 3x - 10 \neq 0}$ factorizamos

$\boldsymbol{(x + 5)(x - 2) \neq 0}$

$\boldsymbol{x+5 \neq 0}$ y $\boldsymbol{x-2 \neq 0}$

$\boldsymbol{x \neq -5}$ y $\boldsymbol{x \neq 2}$

Entonces el dominio es $\boldsymbol{D_f} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}/\boldsymbol{x \neq -5, x \neq 2}\}$

o bien $\boldsymbol{x} \in (-\infty, \boldsymbol{-5})\boldsymbol{U}(\boldsymbol{-5, 2})\boldsymbol{U}(\boldsymbol{2}, \infty)$

DOMINIO DE FUNCIONES CON RADICAL

¿Cómo encontrar el dominio de funciones con radical?

Veamos los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 1

Sea $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sqrt{\boldsymbol{x-8}}$ Encuentre su dominio.

SOLUCIÓN

El radicando debe ser mayor o igual a cero, por lo tanto:

$\boldsymbol{x-8 \geq 0}$

$\boldsymbol{x \geq 8}$

Entonces el dominio es $\boldsymbol{D_f} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}/\boldsymbol{x \geq 8}\}$ o bien $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{8}, +\infty)$

EJEMPLO 2

Sea $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sqrt[3]{\boldsymbol{x-3}}$ Encuentre su dominio.

SOLUCIÓN

Si el índice de la raíz es impar el radicando puede tomar cualquier valor.

Entonces el dominio es $\boldsymbol{D_f} = \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ o bien $\boldsymbol{x} \in (-\infty, +\infty)$

EJEMPLO 3

Sea $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sqrt{\boldsymbol{x^2 - 8x + 15}}$ Encuentre su dominio.

SOLUCIÓN

El radicando debe ser mayor o igual a cero porque el índice es par, por lo tanto:

$\boldsymbol{x^2 - 8x + 15 \geq 0}$ factorizamos

$(\boldsymbol{x-5})(\boldsymbol{x-3}) \geq \boldsymbol{0}$

Igualamos a cero cada factor, para obtener los puntos críticos:

$\boldsymbol{x-5=0}$ y $\boldsymbol{x-3=0}$

$\boldsymbol{x=5}$ y $\boldsymbol{x=3}$

Los puntos críticos son x=5 y x=3

Para determinar el conjunto solución evaluemos la inecuación cuadrática con:

a) Un número menor a 3

b) Un número mayor a 3, pero menor que 5

c) Un número mayor que 5

Veamos:

				$(\boldsymbol{x-5})$	$(\boldsymbol{x-3})$	$(\boldsymbol{x-5})(\boldsymbol{x-3})$
INTERVALOS	$\boldsymbol{x<3}$	VALOR ESCOGIDO	0	$\boldsymbol{0-5}$ $=-$	$\boldsymbol{0-3}$ $=-$	$(-)(-)=+$
	$\boldsymbol{3<x<5}$		4	$\boldsymbol{4-5}$ $=-$	$\boldsymbol{4-3}$ $=+$	$(-)(+)=-$
	$\boldsymbol{x>5}$		6	$\boldsymbol{6-5}$ $=+$	$\boldsymbol{6-3}$ $=+$	$(+)(+)=+$

Cuando la desigualdad es ≥ se escogen como respuestas los intervalos que dieron respuestas positivas.

La desigualdad $(\boldsymbol{x-5})(\boldsymbol{x-3}) \geq \boldsymbol{0}$, se cumple cuando x<3 o cuando x>5. A este intervalo hay que unirle el valor 3 y 5 , pues en él la desigualdad es igual a cero. Por lo tanto la solución es x≤3 o x≥5.

El Dominio es por lo tanto $\boldsymbol{D_f} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}/\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{3}\ \boldsymbol{o}\ \ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{5}\}$ **o bien** $\boldsymbol{x} \in (-\infty, \boldsymbol{3}]\boldsymbol{U}[\boldsymbol{5}, +\infty)$

DOMINIO DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS

¿Cómo encontrar el dominio de funciones logarítmicas?

Para determinar el dominio de funciones con logaritmos, se debe tomar en cuenta que $\boldsymbol{\log_b N = a, para\ N > 0}$**.** En los logaritmos a N se le llama argumento.

Veamos el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 1

Sea $\boldsymbol{f(x) = \log(4x-1)}$ Encuentre su dominio.

SOLUCIÓN

El argumento debe ser mayor que cero, por lo tanto:

$\boldsymbol{4x-1>0}$

$\boldsymbol{4x>1}$

$\boldsymbol{x>\frac{1}{4}}$

Entonces el dominio es $\boldsymbol{D_f} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}/\boldsymbol{x} > \frac{1}{4}\}$ o bien $\boldsymbol{x} \in \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$

DOMINIO DE FUNCIONES COMBINADAS Y CASOS MÁS DIFÍCILES

Veamos los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 1

Sea $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{6-x}}}$ Encuentre su dominio.

SOLUCIÓN

$\boldsymbol{6-x}$ Tiene que ser mayor o igual a cero por estar dentro de una raíz cuadrada, pero además la expresión está en el denominador, por lo tanto, no puede ser cero:

$\boldsymbol{6-x>0}$

$\boldsymbol{-x>-6}$

$\boldsymbol{x<6}$

Entonces el dominio es $\boldsymbol{D_f} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}/\boldsymbol{x} < \boldsymbol{6}\}$ o bien $\boldsymbol{x} \in (-\infty, \boldsymbol{6})$

EJEMPLO 2

Sea $\boldsymbol{f(x) = \frac{\sqrt{2+x}}{3-x}}$ Encuentre su dominio.

SOLUCIÓN

$\boldsymbol{3-x}$ Tiene que ser diferente de cero

$3 - x \neq 0$

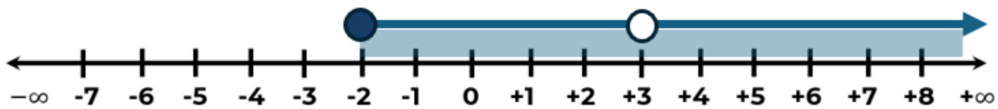
$-x \neq -3$

$x \neq 3$ Ya sabemos que x tiene que ser diferente a 3, pero, además:

$2 + x$ Tiene que ser mayor o igual a cero, por lo tanto:

$2 + x \geq 0$

$x \geq -2$ Se tienen que cumplir estas dos condiciones, para que se entienda mejor haré una gráfica de la solución:



Entonces el dominio es $D_f = x \in [-2, 3)\ U\ (3, +\infty)$

EJEMPLO 3

Sea $f(x) = \sqrt{x^2(x^2 + 5x - 36)(4x^2 - 25)}$ Encuentre su dominio.

SOLUCIÓN

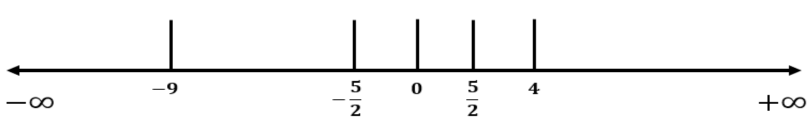
$x^2(x^2 + 5x - 36)(4x^2 - 25)$ Tiene que ser mayor o igual a cero

$x^2(x^2 + 5x - 36)(4x^2 - 25) \geq 0$ factorizamos

$x^2(x + 9)(x - 4)(2x + 5)(2x - 5) \geq 0$ Igualamos a cero cada factor, para obtener los puntos críticos:

$x^2 = 0$	$x + 9 = 0$	$x - 4 = 0$	$2x + 5 = 0$	$2x - 5 = 0$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{0}$	$x = -9$	$x = 4$	$x = \frac{-5}{2}$	$x = \frac{5}{2}$
$x = 0$				

Estos serían los puntos críticos:



Construimos la tabla de valores:

INTERVALOS		VALOR ESCOGIDO	x^2	$(x+9)$	$(x-4)$	$(2x+5)$	$(2x-5)$	$Todas$
	$x<-9$	-12	+	-	-	-	-	+
	$-9<x<-\frac{5}{2}$	-8	+	+	-	-	-	-
	$-\frac{5}{2}<x<0$	-1	+	+	-	+	-	+
	$0<x<\frac{5}{2}$	1	+	+	-	+	-	+
	$\frac{5}{2}<x<4$	3	+	+	-	+	+	-
	$x>4$	10	+	+	+	+	+	+

Cuando la desigualdad es $>$ o $\geq$ se escogen como respuestas los intervalos que dieron respuestas positivas $(+)$

La desigualdad $\boldsymbol{x^2(x+9)(x-4)(2x+5)(2x-5)\geq 0}$ se cumple cuando $x<-9,\ -\frac{5}{2}<x<0,\ 0<x<\frac{5}{2},\ x>4.$ A este intervalo hay que unirle el valor -9, -5/2, 0, 5/2 y 4, pues en él la desigualdad es igual a cero.

Entonces el dominio es $\boldsymbol{D_f=x\in(-\infty,-9]\ U\left[-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right]U[4,+\infty)}$

EJEMPLO 4

Sea $\boldsymbol{f(x)=\frac{\sqrt{10x-5}}{x^2-16}}$ Encuentre su dominio.

SOLUCIÓN

En este problema tenemos que ocuparnos de la raíz cuadrada y de la división por cero. Ocupémonos primeramente de la raíz:

$\boldsymbol{10x-5}$ Tiene que ser mayor o igual a cero

$$\boldsymbol{10x-5\geq 0}$$

$$\boldsymbol{10x\geq 5}$$

$$\boldsymbol{x\geq \frac{5}{10}}$$

$$\boldsymbol{x\geq \frac{1}{2}}$$

Ahora nos ocupamos del denominador:

$\boldsymbol{x^2-16}$ Tiene que ser diferente a cero

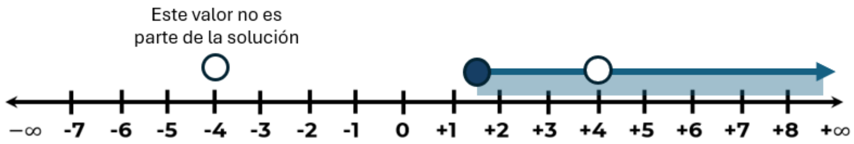
$\boldsymbol{x^2-16\neq 0}$ Factorizamos

$(x+4)(x-4) \neq 0$

$x+4 \neq 0$ $\qquad\qquad$ $x-4 \neq 0$

$x \neq -4$ $\qquad\qquad\qquad$ $x \neq 4$

Se tienen que cumplir estas dos condiciones, para que se entienda mejor haré una gráfica de la solución:



Entonces el dominio es $\boldsymbol{D_f} = \boldsymbol{x} \in \left[\frac{1}{2}, \boldsymbol{4}\right)\ \boldsymbol{U}\ (\boldsymbol{4}, +\infty)$