

POTENCIACIÓN

La potenciación es una expresión matemática que incluye dos términos denominados: base «a» y exponente «n».

Se escribe a^n , y se lee: «a elevado a n».

Cuando el exponente es un número natural, equivale a multiplicar la base por sí misma varias veces: el exponente indica cuántos factores iguales se multiplican.

$$a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_n$$



Ley de los signos:

1. Si la base es positiva, la potencia es positiva sea cual sea el exponente.

Ejemplo: $(3)^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$

2. Si la base es negativa y el exponente par, la potencia es positiva.

Ejemplo: $(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$

3. Si la base es negativa y el exponente impar, la potencia es negativa

Ejemplo: $(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27$

LEYES DE LOS EXPONENTES

Si a y b son bases cualesquiera distintas de cero y m y n enteros positivos, se tiene las siguientes leyes de los exponentes:

1. Multiplicación de potencias de igual base.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Ejemplos:

$$1) 2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

$$2) 1^3 \times 1^4 \times 1^2 = 1^{3+4+2} = 1^9 = 1$$

$$3) x^2 \cdot x^6 = x^{2+6} = x^8$$

$$4) y^5 \cdot y \cdot y^2 = y^{5+1+2} = y^8$$

$$5) a^6 \cdot a^2 \cdot a \cdot a^4 = a^{6+2+1+4} = a^{13}$$



2. División de potencias de igual base.

a) $a^m \div a^n = a^{m-n}$, cuando $m > n$

b) $a^m \div a^n = \frac{1}{a^{n-m}}$, cuando $m < n$

c) $a^m \div a^n = 1$, cuando $m = n$

Ejemplos:

1) $6^5 \div 6^3 = 6^{5-3} = 6^2 = 6 \cdot 6 = 36$

2) $x^6 \div x^4 = x^{6-4} = x^2$

3) $7^5 \div 7^9 = \frac{1}{7^{9-5}} = \frac{1}{7^4} = \frac{1}{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{1}{2401}$

4) $4^8 \div 4^{11} = \frac{1}{4^{11-8}} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{1}{64}$

5) $y^9 \div y^{10} = \frac{1}{y^{10-9}} = \frac{1}{y^1} = \frac{1}{y}$

6) $5^4 \div 5^4 = 1$

7) $x^3 \div x^3 = 1$

3. Potencia de una potencia.

$$(a^m)^n = a^{m \times n} = a^{mn}$$

Ejemplos:

1) $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$

2) $(3^2)^4 = 3^{2 \cdot 4} = 3^8 = 6561$

3) $(x^4)^6 = x^{4 \cdot 6} = x^{24}$

4) $(a^8)^2 = a^{8 \cdot 2} = a^{16}$

4. Potencia de un producto.

$$(ab)^m = a^m b^m$$

Ejemplos:

1) $(2b)^5 = 2^5 b^5 = 32b^5$

2) $(xy)^4 = x^4 y^4$

3) $(2x^3)^5 = 2^5 x^{3 \cdot 5} = 32x^{15}$

4) $(3x^2 y^3)^3 = 3^3 x^{2 \cdot 3} y^{3 \cdot 3} = 27x^6 y^9$

5) $(-2a^4 b)^2 = (-2)^2 a^{4 \cdot 2} b^{1 \cdot 2} = 4a^8 b^2$

6) $\left(-\frac{3mn}{4}\right)^3 = \left(-\frac{3}{4}\right)^3 m^3 n^3 = -\frac{27}{64} m^3 n^3$



5. Potencia de un cociente.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Ejemplos:

$$1) \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{3 \times 3}{4 \times 4} = \frac{9}{16}$$

$$4) \left(\frac{a}{b}\right)^7 = \frac{a^7}{b^7}$$

$$2) \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$$

$$5) \left(\frac{x^3}{z^4}\right)^2 = \frac{(x^3)^2}{(z^4)^2} = \frac{x^6}{z^8}$$

$$3) \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{(-1)^3}{3^3} = -\frac{1}{27}$$

$$6) \left(\frac{2x^5}{3y^6}\right)^3 = \frac{2^3(x^5)^3}{3^3(y^6)^3} = \frac{8x^{15}}{27y^{18}}$$

6. Exponente 0

De acuerdo con la definición de potencia, la potencia a^0 carece de significado pues no existe producto cuando no hay ningún factor. Para este caso se puede dar una definición particular, pero que éste de acuerdo con las leyes de la potenciación.

Así se sabe que $a^5 \div a^5 = a^0$, y por división de potencias de igual base, cuando los exponentes eran iguales vale la unidad.

Luego, tomaremos como definición $a^0 = 1$, si a no es cero.

Todo número elevado al exponente cero es igual a la unidad.

Ejemplos:

$$1) 5^0 = 1$$

$$5) (2x^3y^5)^0 = 1$$

$$2) 3^0 = 1$$

$$6) \left(\frac{3x^4y^7}{2x^2y^5}\right)^0 = 1$$

$$3) r^0 = 1, \text{ si } r \neq 0$$

$$4) \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1, \text{ si } \frac{a}{b} \neq 0$$

7. Exponente 1

Toda potencia de exponente 1 es igual a la base:

$$a^1 = a$$

Ejemplos:

$$1) 25^1 = 25$$

$$2) (-23)^1 = -23$$

$$3) (-3x^4y^2)^1 = -3x^4y^2$$



8. Exponente entero negativo

El exponente negativo resulta de dividir dos potencias de la misma base cuando el exponente de dividendo es menor que el exponente del divisor.

$$a^4 \div a^9 = a^{4-9} = a^{-5}$$

es lo mismo que:

$$a^4 \div a^9 = \frac{a^4}{a^9} = \frac{1}{a^{9-4}} = \frac{1}{a^5}$$

De donde observamos que: $a^{-5} = \frac{1}{a^5}$

En general, toda potencia con exponente negativo es igual a la unidad dividida por la misma potencia con exponente positivo.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{y} \quad \frac{1}{a^n} = a^{-n}, \quad a \neq 0$$

Ejemplos:

$$1) \quad m^{-4} = \frac{1}{m^4}$$

$$5) \quad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$$

$$2) \quad y^{-9} = \frac{1}{y^9}$$

$$6) \quad \frac{1}{10^{-3}} = 10^3 = 1000$$

$$3) \quad \frac{1}{y^3} = y^{-3}$$

$$4) \quad \frac{1}{n^3} = n^{-3}$$

Transformación de exponentes negativos a positivos

De acuerdo con la definición del exponente negativo, veamos los siguientes ejemplos:

$$1) \quad 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$4) \quad 7x^{-5}y^4z^{-8} = \frac{7y^4}{x^5z^8}$$

$$2) \quad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$5) \quad \left(\frac{x^4}{2y^5}\right)^{-4} = \left(\frac{2y^5}{x^4}\right)^4 = \frac{16y^{20}}{x^{16}}$$

$$3) \quad 8^{-1}a^{-3}b^{-2} = \frac{1}{8a^3b^2}$$

Cualquier factor de un término de una fracción se puede trasladar al otro término, si se cambia el signo del exponente del factor.

Cuando simplificamos una expresión significa que todas las respuestas deben expresarse usando exponentes positivos.



SIMPLIFICACIÓN

Los teoremas de los exponentes se aplican dependiendo de cómo esté estructurada la expresión matemática. El orden en que se usan estas reglas lo determinan las operaciones (sumas, multiplicaciones, etc.) y los paréntesis o corchetes que aparezcan en el problema.

EJEMPLOS:

1) Simplifica y da el resultado con exponentes positivos:

$$(-2x^3y^{-5})^{-3}$$

Respuesta:

El exponente de mayor jerarquía se convierte en positivo

$$\begin{aligned} (-2x^3y^{-5})^{-3} &= \frac{1}{(-2x^3y^{-5})^3} \\ &= \frac{1}{(-2)^3(x^3)^3(y^{-5})^3} \quad \text{Se utiliza la propiedad potencia de un producto} \\ &= \frac{1}{-8x^9y^{-15}} \quad \text{Se convierte el exponente negativo a positivo} \\ &= -\frac{y^{15}}{8x^9} \end{aligned}$$

2) Simplifica y da el resultado con exponentes positivos:

$$\left(\frac{3m^3}{4n^5}\right)^2 \cdot \frac{n^2}{6m^2}$$

Respuesta:

Utilizamos la propiedad potencia de una potencia:

$$\begin{aligned} \left(\frac{3m^3}{4n^5}\right)^2 \cdot \frac{n^2}{6m^2} &= \frac{3^2(m^3)^2}{4^2(n^5)^2} \cdot \frac{n^2}{6m^2} \quad \text{Resolvemos las potencias} \\ &= \frac{9m^6}{16n^{10}} \cdot \frac{n^2}{6m^2} \\ &= \frac{\overset{3}{\cancel{9}}m^6}{16n^{10}} \cdot \frac{n^2}{\underset{2}{\cancel{6}}m^2} \quad \text{Se simplifica y se utiliza la propiedad potencia de una división} \\ &= \frac{3m^{6-2}}{32n^{10-2}} \\ &= \frac{3m^4}{32n^8} \end{aligned}$$



3) Simplifica y da el resultado con exponentes positivos:

$$\frac{(x^2 + 1)^{-\frac{2}{3}}(x^2 + 1)^{\frac{1}{6}}}{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}$$

Respuesta:

Como la expresión $x^2 + 1$ es un binomio, trabajaremos solamente con los exponentes:

$$\begin{aligned} \frac{(x^2+1)^{-\frac{2}{3}}(x^2+1)^{\frac{1}{6}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} &= \frac{(x^2+1)^{-\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{Se utiliza la propiedad multiplicación de bases} \\ &\quad \text{iguales en el numerador} \\ &= \frac{(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} \\ &= (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \quad \text{Se utiliza la propiedad división de bases iguales} \\ &= (x^2 + 1)^{-1} \quad \text{Se convierte el exponente negativo a positivo} \\ &= \frac{1}{x^2+1} \end{aligned}$$

4) Simplifica y da el resultado con exponentes positivos:

$$\left(\frac{2^5 x^7 y^{-3}}{2^8 x^{-5} y^{-9}} \right)^{-2}$$

Respuesta:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2^5 x^7 y^{-3}}{2^8 x^{-5} y^{-9}} \right)^{-2} &= \left(\frac{2^5 x^7 x^5 y^9}{2^8 y^3} \right)^{-2} \quad \text{los exponentes negativos dentro del paréntesis los} \\ &\quad \text{convertimos a positivos} \\ &= \left(\frac{x^{12} y^6}{2^3} \right)^{-2} \quad \text{utilizamos las propiedades de multiplicación y} \\ &\quad \text{división de bases iguales dentro del paréntesis} \\ &= \left(\frac{2^3}{x^{12} y^6} \right)^2 \quad \text{Convertimos el exponente negativo en positivo} \\ &= \frac{2^6}{x^{24} y^{12}} \quad \text{utilizamos la propiedad potencia de una potencia} \\ &= \frac{64}{x^{24} y^{12}} \quad \text{Resolvemos la potencia en el numerador} \end{aligned}$$



5) Convierte en una fracción equivalente en la que todos los exponentes sean positivos:

$$\frac{x^{-3} + x^{-2}}{x^{-2} + x^{-1}}$$

Respuesta:

Para eliminar los exponentes negativos, multiplicamos el numerador y el denominador por x^3 (que es x elevado al valor absoluto del exponente más grande en la expresión original):

$$\begin{aligned} \frac{x^{-3}+x^{-2}}{x^{-2}+x^{-1}} &= \frac{(x^{-3}+x^{-2}) \cdot x^3}{(x^{-2}+x^{-1}) \cdot x^3} && \text{Resolvemos la multiplicación} \\ &= \frac{x^{-3+3}+x^{-2+3}}{x^{-2+3}+x^{-1+3}} \\ &= \frac{x^0+x^1}{x^1+x^2} \\ &= \frac{1+x}{x+x^2} && \text{Factorizamos} \\ &= \frac{1+x}{x(1+x)} \\ &= \frac{\cancel{1+x}}{x(\cancel{1+x})} && \text{Simplificamos} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

6) Convierte en una fracción equivalente en la que todos los exponentes sean positivos:

$$\frac{x^{-1} + y^{-1}}{x^{-2} + y^{-2}}$$

Respuesta:

Para eliminar los exponentes negativos, multiplicamos el numerador y el denominador por $x^2 \cdot y^2$ (que es x y y elevado al valor absoluto del exponente más grande en la expresión original):

$$\begin{aligned} \frac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-2}+y^{-2}} &= \frac{(x^{-1}+y^{-1}) \cdot x^2 y^2}{(x^{-2}+y^{-2}) \cdot x^2 y^2} && \text{Resolvemos la multiplicación} \\ &= \frac{x^{-1+2}y^2+x^2y^{-1+2}}{x^{-2+2}y^2+x^2y^{-2+2}} \\ &= \frac{x^1y^2+x^2y^1}{x^0y^2-x^2y^0} \end{aligned}$$



$$= \frac{xy^2 + x^2y}{y^2 - x^2}$$

Factorizamos en el numerador y denominador

$$= \frac{xy(y+x)}{(y+x)(y-x)}$$

$$= \frac{\cancel{xy(y+x)}}{\cancel{(y+x)}(y-x)}$$

Simplificamos

$$= \frac{xy}{y-x}$$

